数理解析研究所講究録 1476 巻 2006 年 196-204

リー群の表現から見たテータ関数*

落合啓之 (Hiroyuki Ochiai)

名古屋大学・大学院多元数理科学研究科
Department of Mathematics,
Nagoya University

1 テータ関数

1.1 テータ級数

$(L, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ を lattice とする. L に対応した theta 級数は

$$\sum_{v\in L} q^{\langle v,v\rangle} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n q^n,$$

で定義される. lattice の元の長さ分布

$$c_n = \#\{v \in L \mid \langle v,v\rangle = n\}.$$

の母関数である. 単位円 $D = \{q \in \mathbf{C} \mid |q| < 1\}$ で収束し, q の正則関数を与える. theta 級数の modular 変換性を理解したい.

1.2 円板 D から上半平面 H へ

τ を上半平面 $H = \{\tau \in \mathbf{C} \mid \mathrm{Im}\tau > 0\}$ の変数とし, $q = e^{2\pi\sqrt{-1}\tau}$ と (いつものように) 置き換える. $\Gamma \subset SL_2(\mathbf{Z})$ を指数有限の部分群とする. 正則関数 $f : H \to \mathbf{C}$ が modular 変換性

$$f((a\tau+b)(c\tau+d)^{-1}) = \chi(\gamma)^{-1}(c\tau+d)^k f(\tau) \qquad \gamma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \Gamma$$

*Theta functions from the Lie groups points of view.
研究集会「代数的組合せ論とその周辺 (2005.10.3–10.6)
E-mail: ochiai@math.nagoya-u.ac.jp

および cusp での正則性を満たすとき Γ に関する (指標 χ のついた) weight k の (正則) 保型形式というのだった.

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, S = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in SL_2(\mathbf{Z})$$

とする. $SL_2(\mathbf{Z})$ は群として T と S で生成されている. f が q の (収束) ベキ級数で書かれていれば, T に関する modular 不変性 $(\tau \mapsto \tau + 1)$ ならびに cusp $\sqrt{-1}\infty \in \overline{\Gamma\backslash H}$ での正則性は明白であるから, S 変換に関する modular 不変性 $(\tau \mapsto -1/\tau)$ が $SL_2(\mathbf{Z})$ に関する保型形式となるための鍵となる. これを単に modular 不変性と呼んでいるのだった. 以上の対応を図式的に書けば

$$D \fallingdotseq \langle T\rangle\backslash H \quad \text{であり} \quad \langle S\rangle\backslash D \fallingdotseq \langle S,T\rangle\backslash H = \Gamma\backslash H$$

である.

1.3 上半平面 H から群 G へ

$G = SL_2(\mathbf{R})$ とし, $K = SO(2) = \{u(\theta) \mid 0 \le \theta < 2\pi\} \subset G$ とする. ここで $u(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ と略記した. K は G の極大コンパクト部分群である. G は H に推移的に作用し, その一点 $i = \sqrt{-1} \in H$ を固定する部分群が K である. つまり, 基点 $\sqrt{-1}$ を用いて同一視 $H = G/K$ ができる. したがって, $\Gamma\backslash H = \Gamma\backslash(G/K) = \Gamma\backslash G/K$ である. この同型に応じた保型形式の群への引き上げを説明する.

$\tau = x + \sqrt{-1}y \in H$ に対して, $b(\tau) = \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{y} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{y} \end{bmatrix} \in G$ とする. このとき $b(\tau)\cdot\sqrt{-1} = \tau$ である.

weight k の保型形式 f に対して,

$$F(b(\tau)u(\theta)) = (\sqrt{y}e^{-\sqrt{-1}\theta})^k f(\tau) \qquad \tau \in H, u(\theta) \in K$$

と定義する. G の元は $b(\tau)u(\theta)$ と一意的に書き表せることから C^∞ 関数 $F : G \to \mathbf{C}$ が定まる. このとき次が成立している.

Proposition 1 f が (weight k の正則) 保型形式である必要十分条件は F が次の3条件を満たすことである.

(a) $F(gu(\theta)) = e^{-\sqrt{-1}k\theta}F(g) \qquad u(\theta) \in K.$

(b) $J^- F = 0.$

(c) $F(\gamma g) = \chi(\gamma)F(g) \qquad \gamma \in \Gamma.$

記号については§1.5でまとめて説明する.

1.4 matrix coefficients

前節にあるように保型形式は大雑把に言って double coset space $\Gamma\backslash G/K$ 上の関数 F と思えるのだった. このような F の作り方として幾何学的な同型

$$\Gamma\backslash G/K = (\Gamma\backslash G) \times_G (G/K)$$

を利用して, F に課せられた条件を G/K の変換性と $\Gamma\backslash G$ の変換性とに分離するというのがアイディアである.

少しの間だけ一般的設定から始める. (R, V) を Lie 群 $G = SL_2(\mathbf{R})$ の表現とする. 微分表現 dR は Lie 環 $\mathfrak{sl}_2(\mathbf{R})$ の表現である. その複素化は複素 Lie 環 $\mathfrak{sl}_2(\mathbf{C})$ の表現であるが, それも同じ記号 dR で書き表す.

Proposition 2 $v \in V$, $\phi \in V^*$ が次の条件を満たすとする.

(a′) $R(u(\theta))v = e^{-\sqrt{-1}k\theta}v$ for all $\theta \in \mathbf{R}$.

(b′) $dR(J^-)v = 0$.

(c′) $\phi \circ R(\gamma)^{-1} = \chi(\gamma)\phi$ for all $\gamma \in \Gamma$.

このとき, 行列係数 (matrix coefficient)

$$F(g) = \phi(R(g)v) \qquad (g \in G)$$

は Proposition 1 の 3 条件 (a),(b),(c) を満たす. □

この命題によって, 保型形式 F を理解する問題は以下のように分離された.

(0) (R, V) として適切な表現 (とその実現) を選ぶ.

(1) (a′),(b′) を満たす $v \in V$ を見つける. その具体的表示を得る.

(2) (c′) を満たす $\phi \in V^*$ を見つける.

Remark 3 たとえば V として, $G = SL_2(\mathbf{R})$ の正則離散系列表現 (を上半平面 H 上の正則関数で実現したもの) を考えると, (c′) を満たすような $\phi \in V^*$ とは保型形式の定義の言い換えに過ぎない. 従って, この場合は, (a′)(b′)+(c′) と分けることで問題が易しくならない.

さてそれではどのような表現 (R, V) を考えれば良いだろうか? また, theta 級数が登場するような設定としては V としてどのような表現を取れば良いだろうか?

(R, V) を Weil 表現とするというのが答えである.

1.5 v の構成 (一般論)

以上の２つの命題に出て来ている記号について復習しておく.

$$J_0 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ J^- = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sqrt{-1} & 1 \\ 1 & -\sqrt{-1} \end{bmatrix},\ J^+ = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -\sqrt{-1} & 1 \\ 1 & \sqrt{-1} \end{bmatrix},$$

$Z = \sqrt{-1}J_0 \in \mathfrak{sl}_2(\mathbf{C})$, とすると, $\{J^+, Z, J^-\}$ は $\mathfrak{sl}_2$-triple をなす. すなわち

$$[Z, J^+] = 2J^+, [Z, J^-] = -2J^-, [J^+, J^-] = Z$$

を満たす. 以上の記号の準備の下で (a′) はそれを微分した次の条件 (a″) とも同値であり, (a‴) とも同値である.

(a″) $dR(J_0)v = -\sqrt{-1}kv.$

(a‴) $dR(Z)v = kv.$

$v \in V$ に関する条件 (a‴) は weight k の weight vector であることを意味している. 一方, 条件 (b) は f の正則性の言い換え (Cauchy-Riemann 方程式) であるが, 条件 (b′) は $v \in V$ が lowest vector であることを意味し, 従って, 2 つの条件 (a‴)(b′) を合わせると $v \in V$ が weight k の lowest weight vector であることを意味している. 特に, 表現 (R, V) は lowest weight vector v を持つような表現 (= lowest weight 表現) でなければならない.

1.6 Weil 表現

$(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ を quadratic space とする. すなわち E を有限次元実ベクトル空間とし, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ を E 上の正定値２次形式とする. $\kappa := \dim E$ とする.

天下り的だが, ($\varphi \in L^2(E), \xi \in E$ に対して)

$$\begin{aligned}
(R(\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{bmatrix})\varphi)(\xi) &= a^{\kappa/2}\varphi(a\xi), \qquad (a > 0) \\
(R(\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix})\varphi)(\xi) &= e^{\sqrt{-1}\pi b\langle\xi,\xi\rangle}\varphi(\xi), \qquad (b \in \mathbf{R}) \\
(R(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix})\varphi)(\xi) &= \int_E e^{2\pi\sqrt{-1}\langle\xi,\eta\rangle}\varphi(\eta)d\eta.
\end{aligned}$$

とすることで $SL_2(\mathbf{R})$ の $L^2(E)$ 上の表現 (c.f. §1.7) を定義することができる. この作用は $L^2(E)$ の自然な unitary 内積を保つので $(R, L^2(E))$ は $SL_2(\mathbf{R})$ の unitary 表現となる. これを $SL_2(\mathbf{R})$ の Weil 表現という.

ここから表現の "微分" を考えれば標準的な議論によって Lie 環 $\mathfrak{sl}_2(\mathbf{R})$ の表現が得られる. ただし $L^2(E)$ に属するすべての関数が "微分できる" わけではないので, 微分可能な部分空間に制限する必要がある. いまの場合は $\mathcal{S}(E)$ を Schwartz 空間 (急減少関数のなす空間) とすると $\mathcal{S}(E) \subset L^2(E)$ は dense であり, そこへ Lie 環が R の微分で作用する. それを $(dR, \mathcal{S})$ と書く. 複素化も同じ記号で書く.

1.7 被覆群について

この小文で解説したい主題とはずれるが，やや正確性を欠く用語を用いているのでここで注意しておく．初読の際は飛ばされたい．

Weil 表現の説明で $\dim E$ が偶数ならば R は $SL_2(\mathbf{R})$ の表現 (つまり $R(g_1g_2) = R(g_1)R(g_2)$ が成り立つ) を定めるが，$\dim E$ が奇数の場合は $SL_2(\mathbf{R})$ の射影表現 ($R(g_1)R(g_2)$ は $R(g_1g_2)$ のスカラー倍と一致) にしかならない．表現となるためには $SL_2(\mathbf{R})$ の 2 重被覆群 $\tilde{SL}_2(\mathbf{R})$ を考えなければならず，(1 のベキ根分の) 繊細な修正が必要となる．

保型形式の言葉に翻訳してみよう．§1.5 (a″) と §1.7(a″) を見比べると，保型形式の weight $k = \kappa/2$ の関係にある．従って $\kappa = \dim E$ が奇数のときは k は半整数である．このように半整数ウエイトの保型形式を扱う場合は定義に現れる保型因子 $(c\tau + d)^k$ の多価性の選び方など，初めから既に注意して議論しなくてはならない．ここではそれらの繊細な議論をすべて省略している．

被覆群の登場する感じは極大 compact 部分群 K で見ることができる．Proposition 2 の条件 (a′) を見ると，左辺の $u(\theta)$ は $\theta \in \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ によって parametrize されているが，(k が半整数の場合) 右辺のスカラー因子 $e^{-\sqrt{-1}k\theta}$ は $\theta \in \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ に対して well-defined ではないためこのままでは厳密には正しくない．ここで同型 $K \cong \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ を利用して $\tilde{K} \cong \mathbf{R}/4\pi\mathbf{Z}$ とすれば $\tilde{K} \to K$ は群の 2 重被覆となり，$\tilde{K} \ni \theta \mapsto e^{-\sqrt{-1}k\theta} \in U(1)$ は well-defined になる．K と G は homotopic なので K の被覆と G の被覆は 1:1 に対応していて，$\tilde{K}$ に対応した $\tilde{G}$ が存在している．ただし G の座標で直接被覆 $\tilde{G}$ を構成するのはやや面倒である．

Lie 環の作用で議論する場合 (たとえば条件 (a″)) には，Lie 群の原点の近傍の情報しか使わないため，被覆に伴う構造の煩雑さは消えてしまい weight が半整数になるという特性で読み取れるに過ぎない．

1.8 v の構成

$(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ に対応した直交群を $O(E)$ とする．

$$O(E) = \{g \in GL(E) \mid \langle g\xi, g\xi\rangle = \langle\xi,\xi\rangle, (\xi \in E)\}.$$

$O(E)$ は $L^2(E)$ に自然に作用するが，その作用に関して不変な関数の全体を

$$L^2(E)^{O(E)} = \{f \in L^2(E) \mid f \circ g = f \text{ for all } g \in O(E)\}$$

とする．

Proposition 4 $L^2(E)$ への $O(E)$ の作用と $SL_2(\mathbf{R})$ の作用は可換．

したがって $L^2(E)^{O(E)}$ は $SL_2(\mathbf{R})$ の表現となる．

$$v(\xi) = e^{-\pi\langle\xi,\xi\rangle} \qquad (\xi \in E)$$

によって $v \in L^2(E)^{O(E)}$ を定めると，$v \in \mathcal{S}(E)$ であって

(a″) $dR(J_0)v = -\sqrt{-1}\frac{\kappa}{2}v$.

(b′) $dR(J^-)v = 0$.

が成り立つ. $L^2(E)^{O(E)}$ は既約 unitary lowest weight 表現であり, v が weight $\kappa/2$ の lowest weight vector である. 以上まとめて, v は Gauss 関数を使って作られている.

1.9 ϕ の構成

一方, ϕ は lattice から作られる. Γ もそれに応じて決まる. $L \subset E$ を $\langle L, L\rangle \subset \mathbf{Z}$ となるような lattice と仮定する. dual lattice を $L^* = \{\xi \in E \mid \langle \xi, L\rangle \in \mathbf{Z}\}$ と書く. このとき $L \subset L^*$ が成り立っている.

test 関数 $\varphi \in \mathcal{S}(E)$ に対して

$$\phi(\varphi) = \sum_{\xi \in L} \varphi(\xi)$$

と定義すると $\phi : \mathcal{S}(E) \to \mathbf{C}$ が定まる. これを theta distribution という.

Lemma 5 このとき, 各 $\gamma \in \Gamma$ に対して $\chi(\gamma) \in U(1)$ があって,

$$\phi(R(\gamma)\varphi) = \chi(\gamma)^{-1}\phi(\varphi)$$

が成り立つ.

Γ の元のうち, 平行移動 (T 変換にあたるもの) が上の変換を満たすことは lattice の平行移動不変性と ϕ の定義からただちに従う. 問題は S 変換にあたる変換による共変性であるが, 通常は Poisson の和公式 (=Fourier 変換) を利用して証明する. しかしもう少し群論的な説明を次で与えよう.

2 theta 対応

2.1 設定

$(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, $L \subset E$ は前節の通りとする.

$F := \mathbf{R}^2 = \mathbf{R}e_1 \oplus \mathbf{R}e_2$ を symplectic form $\langle e_1, e_2\rangle_F = 1$ の入った実 symplectic 線形空間とする. $E_0 := F \otimes_{\mathbf{R}} E$ とすると $\langle\cdot,\cdot\rangle_0 := \langle\cdot,\cdot\rangle_F \times \langle\cdot,\cdot\rangle$ によって E_0 は実 symplectic 線形空間となる. $E_1 := \mathbf{R}e_1 \otimes E \subset E_0$, $E_2 := \mathbf{R}e_2 \otimes E \subset E_0$ とおくと E_1, E_2 は E の Lagrangian 部分空間であり, $E_0 = E_1 \oplus E_2$ である.

次に lattice の記号を準備する. $L_1 := e_1 \otimes L^* \subset E_1$, $L_2 := e_2 \otimes L \subset E_2$ はそれぞれ lattice となる. さらに $L_0 := L_1 \oplus L_2 \subset E_0$ は self-dual lattice となる. $L_0 \cap E_2 = e_2 \otimes L \cong L$ に注意.

主役となるのは Heisenberg 群 $N := E_0 \ltimes \mathbf{R}e_0$ である. N は E_0 を中心拡大として得られる群で, ここでは積は $(\xi + te_0)(\eta + t'e_0) = (\xi+\eta) + (t + t' + \langle\xi,\eta\rangle_0/2)e_0$ と定義しておく. N の部分群を $N_1 := E_1 \oplus \mathbf{R}e_0 \subset N$, $L_0' := L_0 \oplus \mathbf{R}e_0 \subset N$. と定めておく. その指標 (1 次元 unitary 表現) $\chi : N_1 \to U(1)$ ならびに $\chi' : L_0' \to U(1)$ をそれぞれ $\chi(\xi + te_0) = e^{2\pi\sqrt{-1}t}$ ならびに $\chi'((e_1 \otimes \eta) \oplus (e_2 \otimes \xi) \oplus te_0) = (-1)^{\langle\xi,\eta\rangle} e^{2\pi\sqrt{-1}t}$ with $\xi, \eta \in E$ で定義する.

2.2 Heisenberg 群の (無限次元) 既約表現

以上の準備のもと, 誘導表現 $\mathrm{Ind}_{N_1}^N(\chi)$ および $\mathrm{Ind}_{L_0'}^N(\chi')$ を考え, それらの間の (N の表現としての)intertwining 作用素を定義する.

これらはともに N の既約 unitary 表現で, central character が同じ $\chi(te_0) = \chi'(te_0) = e^{2\pi\sqrt{-1}t}$ であることから, unitary 同値である (Stone-von Neumann の定理). 実際には intertwining 作用素 $\Phi : \mathrm{Ind}_{N_1}^N(\chi) \to \mathrm{Ind}_{L_0'}^N(\chi')$ を, 普通に平均する写像

$$\Phi(\varphi)(\xi + te_0) = \sum_{\eta \in L_0/(L_0 \cap E_1)} \varphi((\xi + te_0)\eta)$$

で定めると, これが N の作用と equivariant であり, 両者の同型を与えることがわかる.

さて, $SL(F) = SL_2(\mathbf{R})$ は $E_0 = F \otimes E$ へ自然に作用している. この作用は Heisenberg 群 N の自己同型を引き起こす (中心 Re_0 へは自明に作用する). ところで $N/N_1 \cong E$ であるから, $\mathrm{Ind}_{N_1}^N(\chi) \cong L^2(E)$ なる自然な同型が存在している. したがって Weil 表現 $(R, L^2(E))$ は各 $g \in SL_2(\mathbf{R})$ に対して $R(g) : \mathrm{Ind}_{N_1}^N(\chi) \to \mathrm{Ind}_{N_1}^N(\chi)$ を定めるがこれは実は N-同型になる. これがそもそもの Weil 表現の由来であり, §1.6 で与えた表式がその具体的実現である.

一方で, $SL_2(\mathbf{Z}) \subset SL_2(\mathbf{R})$ の E_0 へ作用で lattice L_0 を保つ元の全体

$$\Gamma = \{\gamma \in SL_2(\mathbf{Z}) \mid \gamma(L_0) = L_0\}$$

は $SL_2(\mathbf{Z})$ の指数有限な部分群をなす. そのような $\gamma \in \Gamma$ に対しては γ の自然な作用によって (N の表現としての) intertwining 作用素 $R'(\gamma) : \mathrm{Ind}_{L_0'}^N(\chi') \to \mathrm{Ind}_{L_0'}^N(\chi')$ が自然な左移動で定まる.

以上を合成すると $\Phi \circ R(\gamma)$ と $R'(\gamma) \circ \Phi$ という 2 つの intertwining 作用素が得られるが, Schur の補題からこの 2 つの作用素は定数倍を除いて一致しなければならない. すなわち $\chi(\gamma) \in U(1)$ が存在して, $R'(\gamma) \circ \Phi = \chi(\gamma)\Phi \circ R(\gamma)$ となる. この公式を test 関数 $\varphi \in \mathcal{S}(E)$ に apply すると $\Phi(\varphi)(\gamma^{-1}\xi) = \chi(\gamma)\Phi(R(\gamma)\varphi)(\xi)$ となる. さらに, delta 関数との pairing を考える, すなわち $\xi = 0$ を代入すると, $\phi(R(\gamma)\varphi) = \chi(\gamma)^{-1}\phi(\varphi)$ が得られる.

要点を再度述べる. $R(g)$ は lattice の取り方に依存しないが変換の具体式は Fourier 変換を含む超越的なもの, 一方で $R'(\gamma)$ は成り立つ $\gamma \in \Gamma$ が lattice に強く依存するが変換は E の線形変換から定まる自然なものという対比を見せている. この両者が intertwining 作用素 Φ で結びつく (Schur の補題!) ので modular 変換性が導かれる.

2.3 Remarks

この説明を見ると $E_0 = F \otimes E$ という大きな symplectic 線形空間に対応した大きな symplectic 群 $Sp(E_0)$ を考えることが自然と思える. このような大きな枠組みを準備してから応用として theta 関数を理解するという説明は比較的良くなされていると思うので, ここでは要点がはっきりするように theta 級数の出方を最短で説明する道筋をとった.

$Sp(E_0)$ には直積型の部分群 $SL_2(\mathbf{R}) \times O(E)$ が自然に含まれていて, 互いが他の交換子群になるという意味で reductive dual pair と呼ばれている. Howe によって建設された reductive dual pair の理論 [H] によれば $Sp(E_0)$ の Weil 表現は重複度 1 で $SL_2(\mathbf{R}) \times O(E)$ の既約表現に分解し, $SL_2(\mathbf{R})$ と $O(E)$ の表現の間の対応を与える. 例えば, $O(E)$ の自明表現と $SL_2(\mathbf{R})$ の lowest weight $\kappa/2$ の lowest weight 表現が対応していた. この対応を古典的な theta 対応の表現論的対応物ということで theta 対応と呼んでいる.

直ちに思いつく一般化は $F = \mathbf{R}^2$ を一般の symplectic vector space にすることで, こうすると $SL_2(\mathbf{R}) = Sp_2(\mathbf{R})$ は $Sp(F) = Sp_{2n}(\mathbf{R})$ に[1]変更される. Siegel 上半空間上の保型形式を扱うことになる.

また, $O(E)$ 不変式は $O(E)$ の 1 次元自明表現に対応していると考えられるが, これを $O(E)$ の一般の有限次元既約表現に対応した場合に拡張することも考えられる. 調和多項式付きの（球関数付きの）テータ級数を扱うことになる.

$(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ が positive definite でなくなると「分解」の意味合いは微妙になるが, 例えば保型形式の間の志村対応は $\langle\cdot,\cdot\rangle$ の符号が $(2+, 1-)$ の場合 (つまり $O(E) = O(2,1)$ の場合) である. リー群の表現論としては lowest weight を持たない表現が登場することが顕著である. 筆者も研究の対象としている.

Lie 環の表現としては調和振動子 (§1.7 の記号では $dR(Z) = \sqrt{-1}dR(J_0)$) の対角化と直結している. oscillator 表現と呼ばれて取り扱われることも多い (手近な参考書として [山下]).

なお §1.4 に述べたような分解を covariant map $v_\tau : H \to V$ を使って説明する流儀もある. lowest weight vector $v \in V$ とは $v_\tau = y^{-\kappa/2}(R(b(\tau))v)$ という関係で対応している. v_τ は無限次元位相線形空間 V に値を取る τ の正則関数であり, ここでは持ち出さないで議論した. 幾何的には $\Gamma\backslash H = (\Gamma\backslash G) \times_G$

[1] $SL_2(\mathbf{R})$ が正確には 2 重被覆群である必要があったように $Sp_{2n}(\mathbf{R})$ の 2 重被覆群 (=metaplectic 群) が登場する.

$H = (\Gamma\backslash G) \times_G (G/K)$ という分解を利用することにあたり，今回説明した $\Gamma\backslash H = \Gamma\backslash G/K = (\Gamma\backslash G) \times_G (G/K)$ とは分解の順番を変更しただけと解釈できるため，本質は変わらない．たとえば $v(\xi) = e^{-\pi\langle\xi,\xi\rangle}$ $(\xi \in E)$ のときは $v_\tau(\xi) = e^{\pi\sqrt{-1}\tau\langle\xi,\xi\rangle}$ という形をしている．[LV] を見られたい．

今回の題材の原典は [W] であるがとても読みやすいとはいえないだろう．日本語で手っ取り早くいろいろ書いてある文献は [夏] である．[Wa] も手頃な長さで読みやすい．今回の記事では [A] を参照したが力点の置き方は違い記号も変えた．

最後に．modular 不変性を持つ級数は無限次元代数 (affine Lie 代数, 頂点作用素代数, Virasoro 代数, 超共形代数 $\cdots$) の表現論からも活発に登場するが，主に指標 (trace) の形で現れる．どちらも Poisson の和公式を基礎に置いているという意味で，全く違う理由で modular 変換性が導かれているわけではないのだがその理解の仕方に差があり気になるところである．

References

[夏] 『Weil 表現入門』第 4 回整数論サマースクール報告集, 1996, 221 pages.

[A] 荒川恒男: [LV] の紹介, [夏] 99–127.

[H] R. Howe: Remarks on classical invariant theory, Trans. AMS, **313**(1989), 539–570.

[HT] R. Howe and Eng-Chye Tan: Nonabelian harmonic analysis. Applications of SL$(2, R)$. Universitext. Springer-Verlag, New York, 1992.

[LV] G. Lion and M. Vergne: The Weil representation, Maslov index and Theta series. Progress in Math. **6**, Birkhäuser, 1980.

[L] S. Lang: $\mathrm{SL}_2(\mathbf{R})$. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Amsterdam, 1975.

[N] K. Nishiyama, H. Ochiai, K. Taniguchi, H. Yamashita and Shohei Kato: Nilpotent orbits, associated cycles and Whittaker models for highest weight representations. Astérisque **273** (2001). Soc. Math. France.

[T] 高瀬幸一: Weil 表現と古典的 Theta 級数, [夏] 44–62.

[Wa] 若山正人: 新谷卓郎の表現論, 数学のたのしみ, 2005 年冬号, 39–58.

[W] A. Weil, Sur certains groupes d'opérateurs unitaires. Acta Math. **111** (1964) 143–211.

[山下] 平井武, 山下博:『表現論入門セミナー』遊星社, 2003.